16 kwietnia 2010

Równania Funkcyjne

Zadanie 1. (*Równanie Cauchy'ego*). Wyznacz wszystkie funkcje ciągłe $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równanie:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{dla wszystkich } x, y \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 2. (*VII Śląski Konkurs Matematyczny, zawody rejonowe 2010*). Znajdź funkcję liniową f, która dla każdego $x \in \mathbb{R}$ spełnia warunek:

$$f(2x+3) = 3x + 1.$$

Zadanie 3. (*VII Śląski Konkurs Matematyczny, zawody finałowe 2010*). Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x równość

$$2 \cdot f(x) + f(1-x) = 3x.$$

Wyznaczyć $f(2010)$.

Zadanie 4. (*VI Śląski Konkurs Matematyczny, zawody rejonowe 2009*). Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełnia warunki:
1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$;
2. $f(1) = 1$.

Wyznaczyć $f\left(\frac{9}{32}\right)$.

Zadanie 5. (*LVII Olimpiada Matematyczna, zawody pierwszego stopnia 2005*). Niech a, b będą liczbami rzeczywistymi. Rozważamy funkcje

$$f(x) = ax + b|x| \quad \text{oraz} \quad g(x) = ax - b|x|.$$

Wykazać, że jeśli

$$f(f(x)) = x \quad \text{dla każdej liczby rzeczywistej } x,$$

to również

$$g(g(x)) = x \quad \text{dla każdej liczby rzeczywistej } x.$$

Zadanie 6. (*LIII Olimpiada Matematyczna, zawody drugiego stopnia 2002*). Dana jest taka funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą równości

$$f(x) = f(2x) = f(1-x).$$

Dowieść, że funkcja f jest okresowa.

Zadanie 7. (*LIX Olimpiada Matematyczna, zawody drugiego stopnia 2008*). Wyznaczyć wszystkie takie funkcje f, określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzi równość

$$f(f(x) - y) = f(x) + f(f(y) - f(-x)) + x.$$

Zadanie 8. (*Śląski Konkurs Matematyczny, zawody finałowe 2004*). Wyznacz wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$ równanie

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y.$$

Zadanie 9. (*L Olimpiada Matematyczna, zawody drugiego stopnia 1999*). Dana jest funkcja $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ taka, że $f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n$ dla $n - 1, 2, \ldots$. Wykazać, że nie istnieją takie funkcje rosnące $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $h\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, że $f = g - h$.

Zadanie 10. (*LV Olimpiada Matematyczna, zawody pierwszego stopnia 2003*). Niech $\mathbb{Q}$ oznacza zbiór wszystkich liczb wymiernych. Wyznaczyć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ spełniające warunek

$$f(x^2 + y) = xf(x) + f(y)$$

dla każdej pary liczb wymiernych x, y.

Zadanie 11. (*LXI Olimpiada Matematyczna, zawody drugiego stopnia 2010*). Wyznaczyć wszystkie takie funkcje monotoniczne f, określone na zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi równość

$$f(f(x) - y) + f(x + y) = 0.$$

(*Uwaga:* Funkcja monotoniczna to funkcja niemalejąca lub nierosnąca.)